

# Derivabilité

Approximation affine :

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h \text{ pour } h \rightarrow 0$$

derivées des fonctions usuelles :

$$x^n \rightarrow n x^{n-1}$$

$$\frac{1}{x^n} \rightarrow -n x^{-n-1}$$

$$\sin(ax+b) \rightarrow a \cos(ax+b)$$

$$\cos(ax+b) \rightarrow -a \sin(ax+b)$$

$$\tan(ax+b) \rightarrow a(1 + \tan^2(ax+b))$$

$$\frac{1}{f} \rightarrow \frac{-f'}{f^2}$$

$$\frac{1}{f^n} \rightarrow -n f \cdot f^{n-1}$$

$$f^n \rightarrow n f' f^{n-1}$$

derivées successive

$$f'(x) \rightarrow (f'(x))' \rightarrow (f'(x))'' \dots$$

derivabilité d'une fonction composée

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$

$g$  une fonction définie sur  $J$

Si  $f$  est dérivable sur  $I$

Si  $g$  est dérivable sur  $J$

$$\forall x \in I \quad f(x) \in J$$

alors  $g \circ f$  est dérivable sur  $I$

et on a  $(g \circ f)'(x) = f'(x) g'(f(x))$

• Si  $f$  est dérivable sur  $I$   
et  $\forall x \in I, f'(x) > 0$

alors la fonction  $\sqrt{f(x)}$  est dérivable  
sur  $I$  et on a  $\sqrt{f(x)}' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Théorème des accroissements finis

Théorème de Rolle :

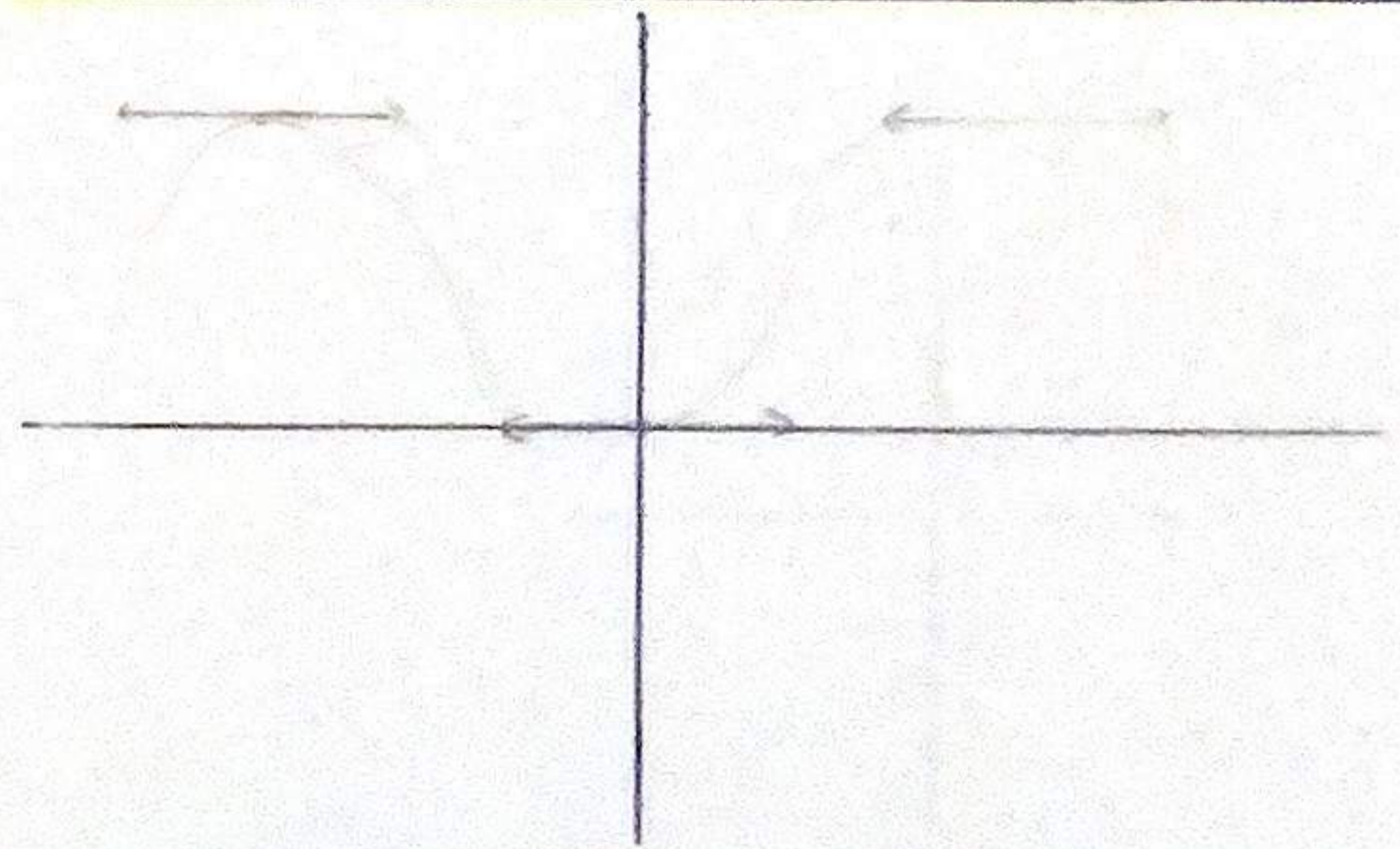
Si  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$

et si  $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$  alors il existe au moins un réel

$$c \in ]a, b[ \text{ tq } f'(c) = 0$$



Conséquence : Théorème des accroissements finis :

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$

et si  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$

$\Rightarrow$  alors il existe au moins un réel  $c$

$$c \in ]a, b[ \text{ tq } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Inégalité des accroissements finis

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$

Si  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$

et si  $\forall x \in ]a, b[; m \leq f'(x) \leq M$

$$\rightarrow m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$



Soit  $f$  : une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . Si pour tout  $x \in I$   $|f'(x)| \leq K$

$\rightarrow$  pour  $\forall$  réel  $a$  et  $b \in I$

$$|f(b) - f(a)| \leq K |b - a|$$

### Théorème :

Si  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ ,  $a \in I$ .

$f$  admet un extremum local en  $a$  ssi  $f'$  s'annule en changeant de signe en  $a$ .

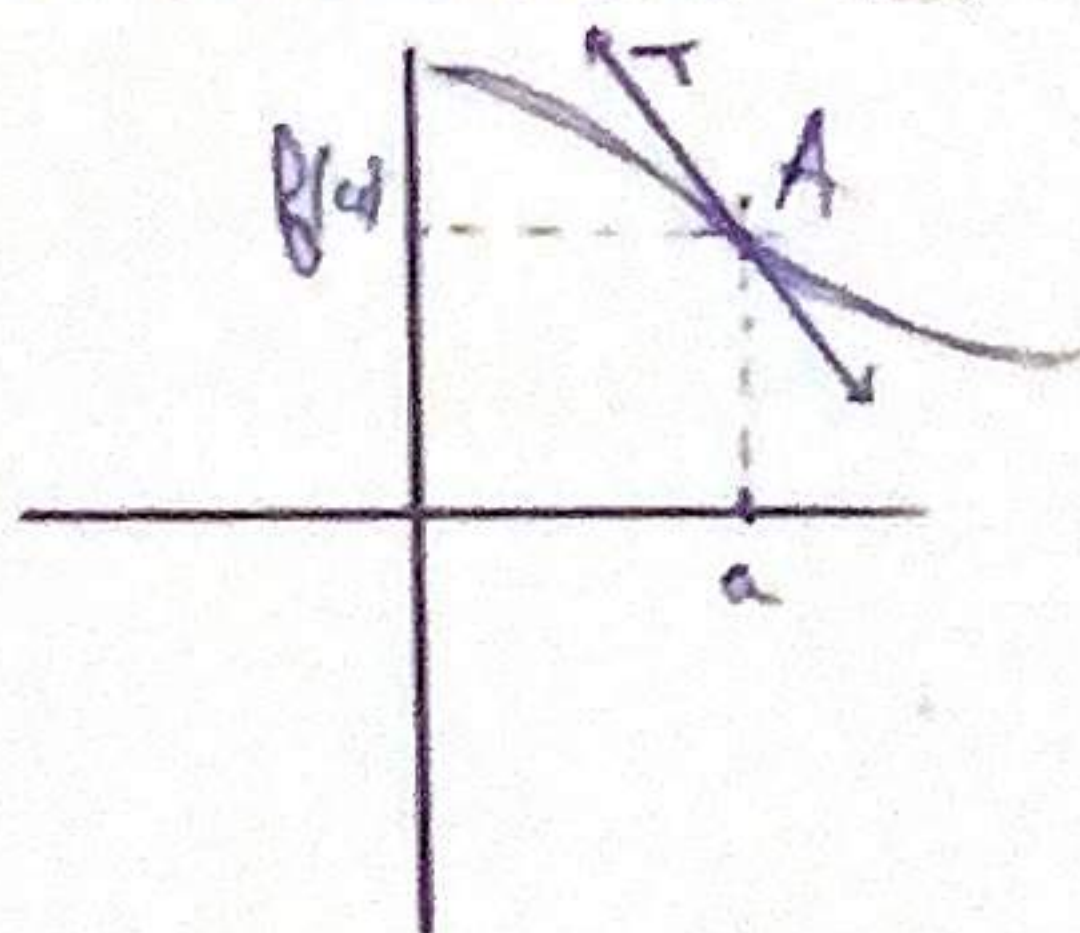
### Point d'inflexion

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$ ,  $a \in I$ .

Soit  $C$  sa courbe représentative.

On dit que le point  $A(a, f(a))$  est un point d'inflexion de la courbe ( $C$ )

lorsque la tangente  $T$  au point  $A$  traverse la courbe  $C$ .



### Théorème

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ ,  $a \in I$ .

$(C_f)$  admet un point d'inflexion est le point  $A(a, f(a))$  ssi  $f''$  s'annule en changeant de signe.

# Fonction Véciproque

une fonction est une bijection d'un intervalle  $I$  sur un intervalle  $J$  ssi pour tout réel  $y \in J$  admet un seul antécédent dans  $I$ .

### Graphiquement

une fonction est une bijection de  $I$  sur  $J$  ssi (soit  $K \in J$ ) la droite  $y = K$  coupe  $C$  en 1 seul point.

### Théorème

Si  $f$  est continue sur  $I$  et strictement monotone alors  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $J$ ,  $J = f(I)$ .

### Conséquence

Soit  $f$  une bijection de  $I$  sur  $J$ , la fonction qui à chaque  $y \in J$  associe un antécédent  $x \in I$  s'appelle fonction réciproque de  $f$  dont le mot  $f^{-1}$

$$\begin{aligned} f: I &\longrightarrow J & x &\in I \\ f^{-1}: J &\longrightarrow I & y &\in J \\ & & f^{-1}(x) &= y \\ & & f(y) &= x \end{aligned}$$

$$\forall x \in I \quad f^{-1} \circ f(x) = x$$

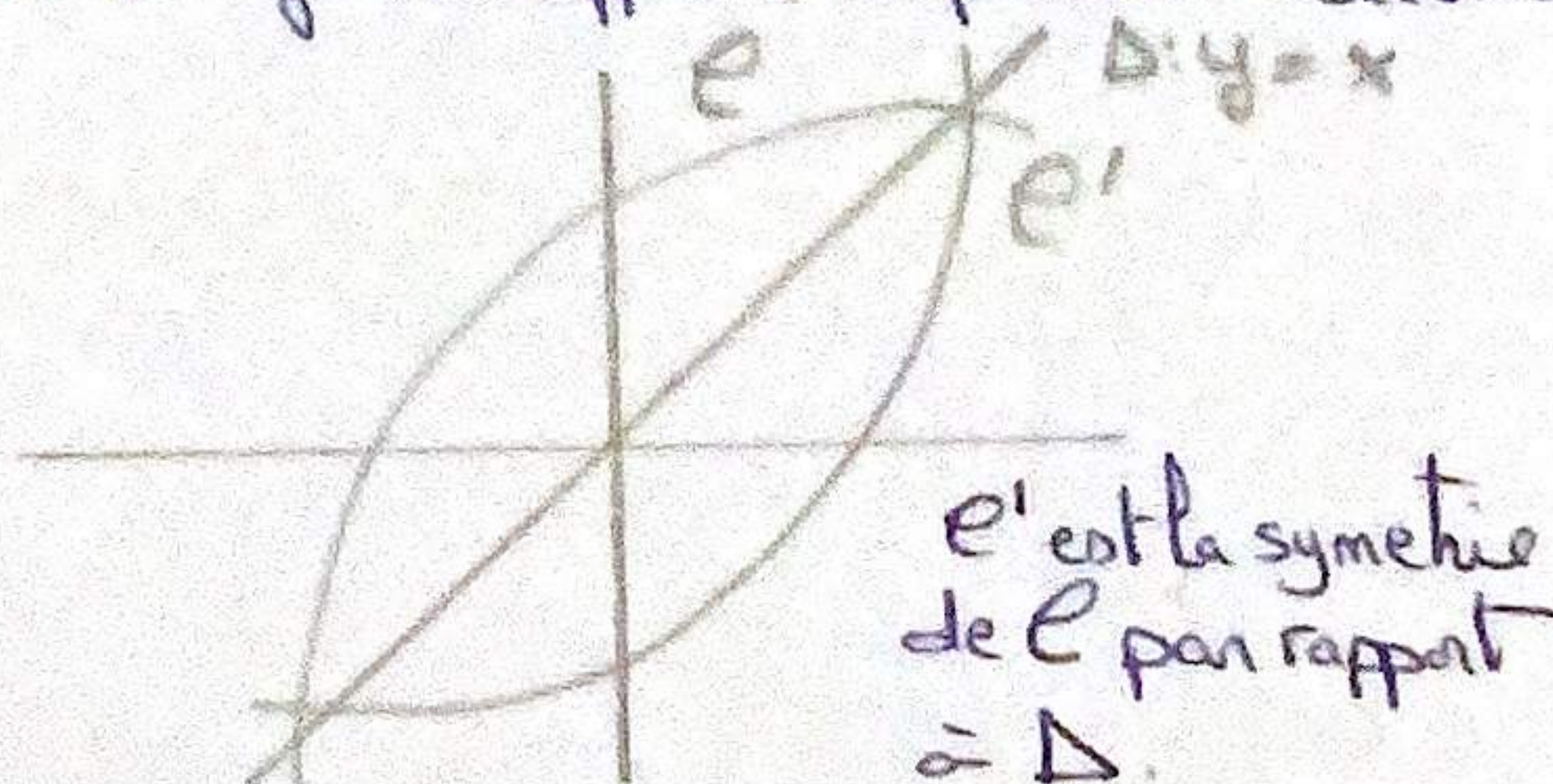
$$\forall x \in J \quad f \circ f^{-1}(x) = x$$

### théorème

Si  $f$  une bijection d'un intervalle  $I$  sur un intervalle  $J$ .

Soit  $f^{-1}$  une fonction réciproque on désigne par  $C$  et  $C'$  les courbes représentatives de  $f$  et  $f^{-1}$  dans un R.O.D

Soit  $\Delta: y = x$  s'appelle la première bissectrice



$C'$  est la symétrique de  $C$  par rapport à  $\Delta$ .